كليّة الهندسة

السنة الثالثة

الفصل الأول

الدكتور: أمجد زينو

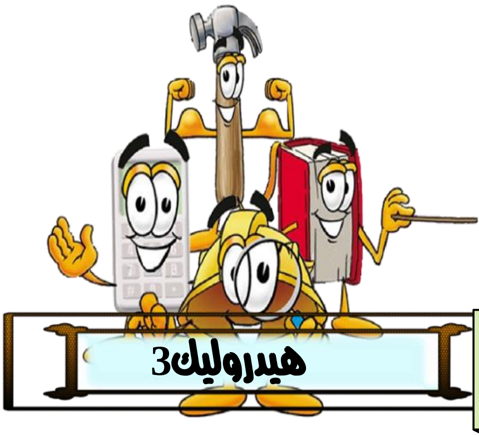
25/11/2013

المحاضرة

8

عدد الصفحات

8



في المحاضرة السابقة تحدثنا عن(مفهوم الطبقة الحدية والمناطق المكونة لها ومفهوم سماكة الطبقة الحدية وأن تحديد نوع الجريان يعتمد على عدد رينولدز الذي يتعلق ب x (مسافة الدخول للصفيحة) حيث:

الجريان صفحي ⟸ $Re_x < 5 * 10^5$

الجريان مضطرب ⟸ $Re_x > 5 * 10^5$

وأخيرا استنتجنا المعادلة التكاملية لكمية الحركة على الشكل التالي:

$$\boxed{\tau_\omega = \rho . U^2 . \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 \frac{u}{U} (1 - \frac{u}{U}) d\eta}$$

أما اليوم سنبحث في حل هذه المعادلة التكاملية لحل المعادلة التكاملية لكمية الحركة يتضمن القيام بالخطوات التالية:

١ –افتراض شكل علاقة توزع السرعة في الطبقة الحدية. ويمكن هنا اعتماد العلاقة :

$$\boxed{\frac{u}{U} = f\left(\frac{y}{\delta}\right) = f(\eta)}$$

واعتبار الشروط الحدية التالية:

$$y = 0 \longrightarrow u = 0$$

$$y = \delta \longrightarrow u = U$$

$$y = \delta \longrightarrow \frac{du}{dy} = 0$$

٢ – إيجاد إجهاد القص عند الجدار بدلالة سماكة الطبقة الحدية بتطبيق قانون نيوتن:

$$\boxed{\tau_\omega = \mu \frac{du}{dy}}$$

-تعويض قيمة اجهاد القص عند الجدار في المعادلة التكاملية لكمية الحركة ثم القيام بحلها

الطبقة الحدية الصفحية:

ان اكثر العلاقات استخداما للتعبير عن توزع السرعة في الطبقة الحدية الصفحية هي العلاقة الجيبية التالية:

$$\frac{u}{U} = \sin\left(\frac{\pi}{2}.\frac{y}{\delta}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}.\eta\right)$$

أما إجهاد القص عند الجدار فيحسب كما أسلفنا بتطبيق علاقة نيوتن :

$$\tau_\omega = \mu \frac{du}{dy}\bigg|_{Y=0} = \mu \frac{U.d\left(\frac{u}{U}\right)}{\delta.d\left(\frac{y}{\delta}\right)}\Bigg|_{\frac{y}{\delta}=0} = \mu.\frac{U.d\left(\frac{u}{U}\right)}{\delta.d(\eta)}\Bigg|_{\eta=0} = \mu.\frac{U.d\left(\frac{u}{U}\right)}{\delta.d(\eta)}\Bigg|_{\eta=0}$$

$$\tau_\omega = \frac{\mu.U}{\delta}.\frac{d}{d\eta}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)\right)\bigg|_{\eta=0} = \frac{\mu.U}{\delta}.\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)\bigg|_{\eta=0}$$

ومنه:

$$\boxed{\tau_\omega = \frac{\pi}{2}.\frac{\mu.U}{\delta} \ldots .1}$$

وبتطبيق المعادلة التكاملية لكمية الحركة:

$$\tau_\omega = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx}\int_0^1 \frac{u}{U}.\left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta$$

وبالتعويض في المعادلة السابقة عن $\frac{u}{U}$ بقيمتها:

$$\tau_\omega = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx}\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}.\eta\right)\left[1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}.\eta\right)\right].d\eta$$

$$\tau_\omega = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx}\int_0^1 \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}.\eta\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{2}.\eta\right)\right] d\eta$$

وبالمكاملة بالنسبة الى η والتعويض بقيم حدود التكامل نحصل على:

$$\boxed{\tau_\omega = 0.137\, \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \ldots \ldots \ldots \ldots .2}$$

(**انتبه** عند حساب التكامل بالآلة الحاسبة يجب أن تكون في وضع الراديان حصرا)

وبالتعويض١مع ٢:

$$\frac{\pi}{2}.\frac{\mu.U}{\delta} = 0.137\, \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \Longrightarrow \delta.d\,\delta = 11.5\frac{\mu}{\rho U}\, dx$$

وبالمكاملة نستنتج:

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{11.5\mu.}{\rho U} x + c$$

تحدد قيمة ثابت التكامل من الشروط الحدية:

$$x = 0, \delta = 0 \longrightarrow c = 0$$

تصبح المعادلة بالشكل التالي:

ومنه:

$$\delta = \sqrt{\frac{23\mu.x}{\rho U}} = 4.8x\sqrt{\frac{\mu}{\rho.U.x}} = 4.8\frac{x}{\sqrt{Re_x}} \ldots .3$$

حيث:

$$\boxed{Re_x = \frac{\rho.U.x}{\mu} = \frac{U.x}{\nu}}$$

ان العلاقة 3 تمكننا من حساب سماكة الطبقة الحدية الصفحية عند اي مقطع من صفيحة مستوية ملساء يبعد مسافة X عن بداية الدخول بعد معرفة قيمة عدد رينولدز عند هذا المقطع

<u>ولحساب سماكة الازاحة:</u>

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \delta.\int_0^1 \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta$$

$$\delta^* = \delta\int_0^1 \left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}.\eta\right)\right) d\eta$$

ومنه:

$$\delta^* = \left(\frac{\pi - 2}{\pi}\right)\delta$$

أما لحساب سماكة كمية الحركة:

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \delta\int_0^1 \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta$$

$$\theta = \delta\int_0^1 \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}.\eta\right)\right).\left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}.\eta\right)\right) d\eta$$

ومنه:

$$\theta = \left(\frac{4 - \pi}{2\pi}\right)\delta$$

ولايجاد قيمة اجهاد القص عند الجدار نعوض قيمة δ المحسوبة وفق العلاقة 3 فنجد:

$$\tau_\omega = \frac{\pi}{2}.\frac{\mu.U}{\delta} = \frac{\pi}{2}.\frac{\mu.U.\sqrt{Re_x}}{4.8.x} = \frac{\pi}{2}.\frac{\mu.U^2.\sqrt{\frac{\rho.U.x}{\mu}}}{4.8.U.x}$$

وأخيرا نكتب العلاقة السابقة كما يلي:

$$\boxed{\tau_\omega = 0.327.\frac{\rho.U^2}{\sqrt{Re_x}}}$$

تسمى النسبة بين اجهاد القص المؤثر عند الجدار والضغط الديناميكي الناتج عن الجريان **معامل الاحتكاك** C_f وهو يساوي:

$$\boxed{C_f = \frac{\tau_\omega}{\frac{1}{2}.\rho.U^2}}$$

وبالتالي يمكن كتابة علاقة اجهاد القص عند الجدار على الشكل:

$$\tau_\omega = \frac{1}{2}.C_f.\rho.U^2$$

وبتعويض قيمة τ_ω من العلاقة السابقة نجد أن معامل الاحتكاك يساوي:

$$\boxed{C_f = \frac{0.654}{\sqrt{Re_x}}}$$

ومن المفيد التنويه هنا الى أن العلاقات السابقة استنتجت بافتراض أن منحني توزع السرعة في الطبقة الحدية الصفحية هو تابع جيبي وهي قريبة جدا من العلاقات التي يعطيها الحل النظري الدقيق الذي يعتمد على حل معادلات نافييه -ستوكس المقدم من قبل تلميذ براندتل الباحث الألماني **بلاسيوس وقد توصل للعلاقات التالية:**

$$\delta = 5.\frac{x}{\sqrt{Re_x}} \qquad \theta = 0.133.\delta \qquad \delta^* = 0.344.\delta$$

$$\tau_\omega = 0.332.\frac{\rho.U^2}{\sqrt{Re_x}} \qquad C_f = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}}$$

الطبقة الحدية المضطربة:

أثبتت التجارب التي أجراها براندتل أن الشكل العام لمنحني توزع السرعة في حالة الطبقة الحدية المضطربة على صفيحة مستوية ملساء هو من الشكل:

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{n}} = \eta^{\frac{1}{n}}$$

حيث تتعلق قيمة n بشكل رئيس بعدد رينولدز وهي تقع ضمن المجال $6 < n < 11$ وتعتبر n=7 القيمة الأكثر استخداما لذلك سنفرض أن منحني توزع السرعة هو من الشكل:

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} = \eta^{\frac{1}{7}}$$

فلو طبقنا علاقة نيوتن لحساب إجهاد القص عند الجدار :

$$\boldsymbol{\tau_\omega} = \boldsymbol{\mu}\frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{dy}}\bigg|_{Y=0} = 0$$

لوجدنا أن $\boldsymbol{\tau_\omega} = \boldsymbol{\mu}\frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{dy}}\Big|_{Y=0} = 0$ تساوي ∞ وهذا يعني أن المتابعة في حل المسألة أمر مستحيل . لكن الدراسات التجريبية أثبتت أن العلاقة التي تعطي إجهاد القص عند الجدار هي:

$$\boldsymbol{\tau_\omega} = 0.029.\frac{\rho.U^2}{(Re_x)^{\frac{1}{5}}}$$

وبتطبيق المعادلة التكاملية لكمية الحركة:

$$\tau_\omega = \rho.U^2.\frac{d\delta}{dx}\int_0^1 \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)d\eta = \rho.U^2.\frac{d\delta}{dx}\int_0^1 \eta^{\frac{1}{7}}.\left(1-\eta^{\frac{1}{7}}\right)d\eta$$

وبالمكاملة بالنسبة لη نحصل على:

$$0.029\frac{\rho.U^2}{(Re_x)^{\frac{1}{5}}} = \frac{7}{72}\rho.U^2.\frac{d\delta}{dx} \Longrightarrow 0.029\frac{dx}{(Re_x)^{\frac{1}{5}}} = \frac{7}{72}.d\delta$$

ومنه:

$$\frac{0.029.x^{-\frac{1}{5}}.dx}{\left(\frac{\rho.U}{\mu}\right)^{\frac{1}{5}}} = \frac{7}{72}.d\delta$$

وبالتكامل نجد:

$$\frac{5}{4}.\frac{0.029.x^{\frac{4}{5}}}{\left(\frac{\rho.U}{\mu}\right)^{\frac{1}{5}}} = \frac{7}{72}.\delta$$

وبضرب البسط والمقام ب$x^{\frac{1}{5}}$ نحصل على:

$$\frac{5}{4}.\frac{0.029.x^{\frac{4}{5}}.x^{\frac{1}{5}}}{\left(\frac{\rho.U}{\mu}\right)^{\frac{1}{5}}.x^{\frac{1}{5}}} = \frac{7}{72}.\delta \Longrightarrow \delta = \frac{0.37.x}{(Re_x)^{\frac{1}{5}}}$$

وبالتالي:

$$C_f = \frac{0.058}{(Re_x)^{\frac{1}{5}}}$$

ولحساب سماكة الإزاحة:

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1-\frac{u}{U}\right) dy = \delta.\int_0^1 \left(1-\frac{u}{U}\right) d\eta = \delta\int_0^1 \left(1-\eta^{\frac{1}{7}}\right) d\eta$$

ولحساب سماكة كمية الحركة:

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right) dy = \delta\int_0^1 \left(1-\frac{u}{U}\right) d\eta = \delta\int_0^1 \eta^{\frac{1}{7}}.\left(1-\eta^{\frac{1}{7}}\right) d\eta$$

ومنه:

$$\theta = \frac{7}{72}\,\delta$$

<u>للمسائل:</u>

طبقة حدية مضطربة:

$$\delta = \frac{0.37.x}{(Re_x)^{\frac{1}{5}}} \qquad \tau_\omega = 0.029.\frac{\rho.U^2}{(Re_x)^{\frac{1}{5}}}$$

$$\tau_\omega = \frac{1}{2}.C_f.\rho.U^2$$

طبقة حدية صفحية:

$$\delta = 5.\frac{x}{\sqrt{Re_x}} \qquad \tau_\omega = 0.332.\frac{\rho.U^2}{\sqrt{Re_x}}$$

$$\tau_\omega = \frac{1}{2}.C_f.\rho.U^2$$

<u>في الامتحان يوجد نوعين من المسائل:</u>

المعطيات موجودة نتأكد من نوع الجريان حسب عدد رينولدز (صفحي أو مضطرب) ومن ثم نطبق القوانين السابقة $\tau_\omega, \delta, ...$.

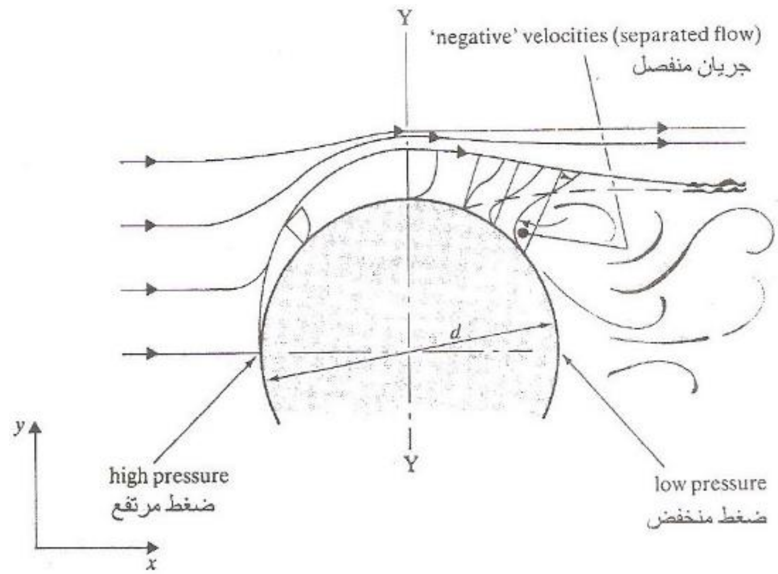
أما النوع الثاني يعطى تابع توزع السرعة (بعد أن قمنا باستنتاج العلاقات السابقة نعوض بتلك العلاقات)

ملاحظة: عندما يعطى تابع توزع السرعة ويطلب استنتاج العلاقات نعود لتطبيق الخطوات التي تمت ذكرها في بداية المحاضرة.

<u>انفصال الطبقة الحدية:</u>

عند دراسة الطبقة الحدية المتشكلة أثناء الجريان على صفيحة مستوية افترضنا أن تدرج الضغط باتجاه الجريان $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ وسنحاول الان دراسة الجريان حول أسطوانة دائرية

من الشكل نلاحظ أنه من جهة الأسطوانة المقابلة للجريان يحصل انضغاط في الجريان مما يؤدي الى زيادة السرعة ونقصان الضغط وبالتالي فإن تدرج الضغط لا يكون مساويا الصفر وإنما يحصل هبوط في الضغط ويكون تدرج الضغط سالبا $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$ ، أما في الاتجاه المعاكس للجريان،أي خلف الأسطوانة فيزداد الضغط ويكون تدرج الضغط موجبا $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$



نميز في الطبقة الحدية المتشكلة أثناء الجريان ثلاث مناطق:

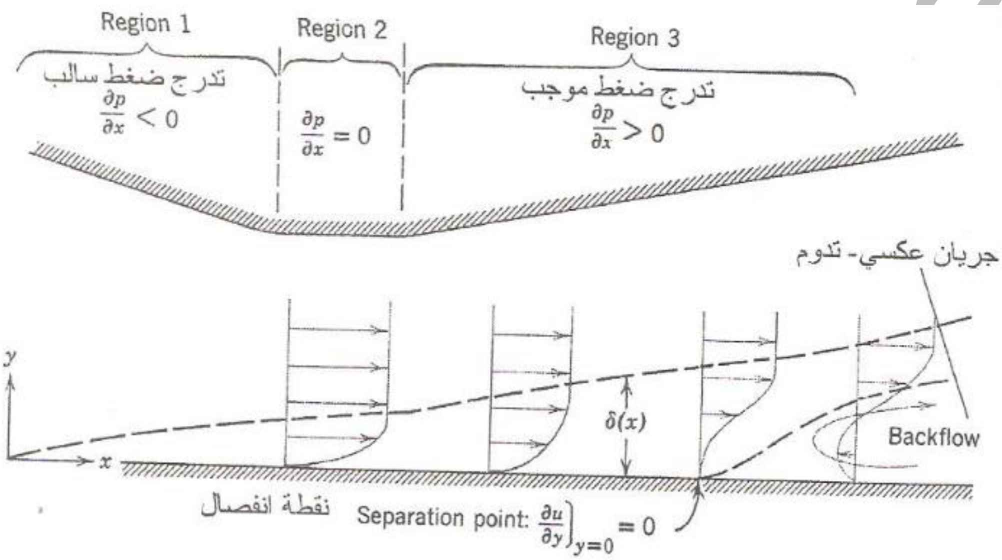
__المنطقة الأولى:__ يتناقص فيها الضغط مع تقدم الجريان ، ويكون تدرج الضغط في الطبقة الحدية سالبا وهنا لاتوجد اي مشكلة ،لان النقصان في الضغط يمكن تعويضه بزيادة السرعة وقد أثبتت التجارب أن فواقد الطاقة في منطقة تدرج الضغط السلبي ليست كبيرة

__المنطقة الثانية:__ يشبه حالة الجريان على صفيحة مستوية،حيث يكون تدرج الضغط مساويا الصفر

__المنطقة الثالثة:__ يزداد الضغط مع تقدم الجريان ، ويكون تدرج الضغط موجبا ، ولا يمكن التعويض عن زيادة الضغط الذي يحدث في الطبقة الحدية إلا عن طريق إبطاء الجريان وخفض سرعته ،الأمر الذي يؤدي إلى ازدياد سماكة الطبقة الحدية،وانعدام سرعة الجريان ليس فقط على الجدار وإنما على مسافة معينة منه ،مما يؤدي إلى تشكل تيارات ودوامات ترافقها فواقد هائلة في الطاقة .وتدعى ظاهرة تشكل تيارات عكسية **انفصال الطبقة الحدية** . والواقع أنه ليس من الضروري حدوث انفصال عندما يكون تدرج الضغط موجبا ولكن الشرط اللازم لحدوث الانفصال هو وجود تدرج ضغط موجب إن عملية الانفصال تبدأ من النقطة التي يصبح فيها تدرج السرعة عند الجدار مساويا للصفر أي $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ وتدعى النقطة التي يبدأ عندها الانفصال **بنقطة الانفصال**

إن ظاهرة انفصال الطبقة الحدية تعتبر من أكبر المشاكل التي تواجه مصممي الطائرات حيث أن انفصال الطبقة الحدية على جناح الطائرة يسبب خلخلة كبيرة في جسم الطائرة وفواقد احتكاك هائلة تضاف لفواقد الاحتكاك المتشكلة أصلا بين الهواء وجسم الطائرة .

كما تصادف مشكلة انفصال الطبقة الحدية على ريش التوربينات والمحركات النفاثة والمضخات المحورية والمختلطة.



written and printed by: *NABEL SOLIMAN*

THE END