كلّية الهندسة

السنة الثالثة

الفصل الأول

الدكتور: هشام النجار

12/11/2013

المحاضرة 14

عدد الصفحات 9

تابع توزيع غاوص:

هو أحد التوابع المهمة في الإحصاء الذي إستخدم من قبل غاوص في دراسة أخطاء القياس .

يعطى تابع كثافة الاحتمال بالعلاقة:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma.\sqrt{2.\pi}}.e^{-\frac{1}{2}[(x-\overline{x})/\sigma]^2}$$

وهو تابع التوزيع التفاضلي حيث:

$\overline{x}$: المتوسط الحسابي و σ: الانحراف المعياري

بمكاملة التابع $\varphi(k)$ نحصل على تابع التوزيع الاحتمالي $\Phi_u(k)$ و الذي يأخذ الشكل التالي

لحالة احتمال عدم التجاوز $\Phi_{(x)}=\frac{1}{\sigma.\sqrt{2.\pi}}.\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\overline{x}}{\sigma}\right]^2}.dx$

-عندما ندخل متحولاً خاصاً (k) إلى معادلة كثافة الاحتمال بحيث تكون قيمة الانحراف المعياري

لهذا المتحول $\sigma_{(k)}=1$ وقيمة المتوسط الحسابي لـ (k) تساوي الصفر يأخذ تابع غاوص الشكل الآتي

$$\varphi(k)=\frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.e^{-(k^2/2)}$$

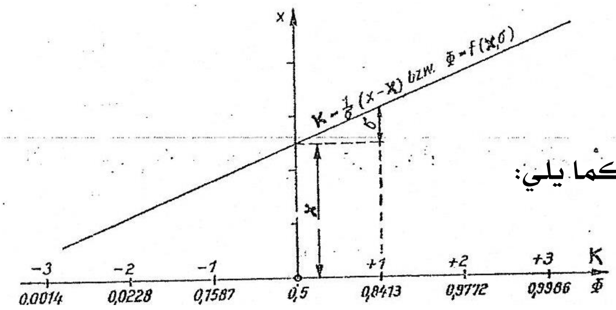
حيث: k: المتحول القياسي و يعطى بالشكل التالي: $k=\frac{x_i-\overline{x}}{\sigma}$

أما تابع توزيع الاحتمال فيعطى بالشكل التالي: $\Phi_u(k)=\frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.\int_{-\infty}^{k}e^{-k^2/2}.dk$

باعتبار أن : $\varphi(-k)=\varphi(k)$ و $\Phi_u(-k)=1-\Phi_u(k)$

فإن الجداول موضوعة للقيم الموجبة لـ k .

الجداول المرفقة تعطى قيم لـ $\varphi(k)$ و $\Phi(k)$ وهي موضوعة لأجل المتحول k



الجداول موجودة في نهاية المحاضرة

شبكة توزيع غاوص:

إن تابع توزيع غاوص يمكن أن يحول إلى شكل مستقيم كما يلي:

من أجل $k = 0$ فإن $x = \bar{x}$

من أجل $k = 1$ فإن $x = \bar{x} + \sigma$

- إن التدريجات (k) على المحور الأفقي يمكن أن نستنتج لكل منها قيمة $\Phi_u(k)$

-المحور الشاقولي ندرجه حسب قيمة المتحول التي ندرسها عليه .

مسائل طلب الدكتور حلها:

١. ليكن لدينا عينة متوسطها ١١٠ و انحرافها المعياري ١٢ والمطلوب:

أوجد باستخدام تابع توزيع غاوص :

$$p(98 < x < 115)\ ,\ p(x > 100)\ ,\ p(x < 90)$$

٢. عند حساب المتوسط الحسابي و الانحراف المعياري لقياسات الهطول السنوية في محطة المزة المناخية وجد القيم التالية ٢٢٠ مم و ٤٥ مم على التوالي والمطلوب:

$p(x < 125\ mm)\ ,\ p(x > 300\ mm)$ أوجد قيمة الهطول التي يتجاوزها كل ٥٠ سنة .

تابع توزيع القيم الحدية Gumbel:

نهتم في الهيدرولوجيا خصوصاً بتحديد القيم الحدية للظواهر الهيدرولوجية الدنيا والعظمى مثال على ذلك التصاريف الدنيا و العظمى حيث أن مرور مثل هذه التصاريف له تأثير بالغ في الاقتصاد.

-يصلح تابع غمبل لمعالجة القيم العشوائية المؤلفة من قيم عظمى ويسمى تابع التوزيع (typ I)

-نحصل مثلاً على العينة العشوائية لقيم التصاريف السنوية الأعظمية $HQ_{(a)}$ بأن نأخذ التصريف الأعظمي الذي يظهر كل عام ، إن مجموعة القيم لعدة سنوات تشكل سلسلة القيم السنوية العظمى للتصاريف.

-تعطى كثافة الاحتمال حسب تابع توزيع غمبل (typ I) بالعلاقة:

$$\varphi_{(x)} = a.e^{-a.(x-M_o)}.e^{-e^{-a(x-M_o)}}$$

-بمكاملة التابع السابقة نحصل على تابع التوزيع الاحتمالي $\Phi(x)$ لعدم التجاوز كما يلي:

$$\Phi_u = e^{-e^{-a(x-m_o)}}$$

حيث:

a: ثابت يتناسب عكساً مع الانحراف المعياري.

M_o: معيار التوزيع.

-بإدخال المتحول المختزل (y) حيث: $y = a(x - m_o)$ ⟸ $\Phi_u(x) = e^{-e^{-y}}$

شبكة توزيع غمبل:

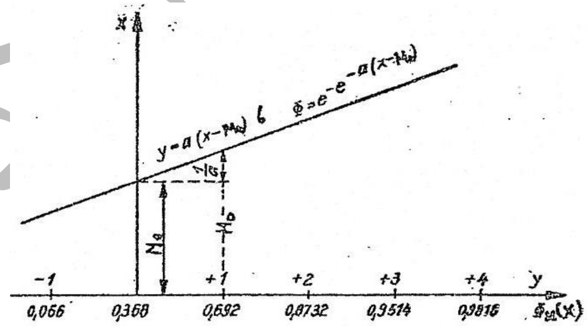
من المعادلة $y = a(x - m_o)$ نوجد علاقة خطية بين X وy كما يوجد إمكانية لتحويل غمبل ($typ\ I$) إلى شكل مستقيم بتشويه المحور الأفقي:

$y = 0 \qquad \Phi(x) = 0.368$

$y = 1 \qquad \Phi(x) = 0.692$

$y = 2 \qquad \Phi(x) = 0.8732$

$Y = 3 \qquad \Phi(x) = 0.9514$



الجدولين التاليين للاطلاع ^_^

النهر	نوع الفيضان	التاريخ	الهلاك	ملاحظات
هووك في الصين	فيضان نهري	1878	900000	دمر $130000\ km^2$ ومسح عدى قرى
جونزت ناون في بنسفلانيا	انهيار سد	1889	2200	انهار سد ارتفاع الموج 4 أمتار
يانكزي (الصين)	فيضان نهري	1911	100000	كون بحيرة طولها 130 كم وعرضها 50 كم
يانكزي (الصين)	فيضان نهري	1913	200000	امتد الفيضان هانكو إلى شنغهاي و ترك 10 ملايين نسمة بدون مأوى
يفايونت (إيطاليا)	انهيار سد	1963	2000	غمرت عدة قرى
غابة (بنغلادش)	فيضان نهري	1991	200000	

معايير تحديد التصريف التصميمي في نيويورك الولايات المتحدة الأمريكية:

التصريف التصميمي لمفيض السد	حجم السد	درجة الخطورة
100 year	صغير	A
15% of 100 year	كبير	A
25% of 100 year	صغير	B
40% of 100 year	كبير	B
50% 100 year	صغير	C
PMF	كبير	C

حساب التصاريف الأعظمية

مقدمة:

-غالباً مايتم البحث عن العلاقة بين قيمة التصريف الأعظمي في موقع ما من نهر و بين احتمال التجاوز لهذه القيمة أو فترة تكرار هذوه القيمة (T).

-عند توافر سلسلة مراقبات للتصريف لفترة ٢٠ عاماً حتى ٣٠ عاماً وبتطبيق نظرية الاحتمالات على سلسلة المراقبات يمكن تحديد القيمة العظمى التي تتوقع حدوثها مستقبلاً.

-لسلسلة المراقبات المتوافرة بعد استنتاج الثوابت الإحصائية لهذه السلسلة نوجد تابع التوزيع الإحتمالي المناسب لتمثيل هذه الظاهرة ، حيث من خلال هذا التابع يمكن أن نصف المجموع العام للعينات وبالتالي استنتاج قيمة الظاهرة (التصريف) خارج مجال المراقبات أي نستنتج قيمة ما لفترة تكرار تتجاوز فترة القياس.

-إن دقة استنتاج قيمة ظاهرة ما تكون أفضل كلما كانت السلسلة المراقبات تمتد لفترة أطول أو كلما كانت عدد سنوات المراقبة وفترة التكرار التي نحسب لها القيمة العظمى متقاربين.

قبل البدء بتحديد القيم العظمى لا بد من:

١ -اختبار جودة القياسات المتوافرة من حيث تجانس هذه القياسات مثل منحني التحليل الكمي المزدوج

٢ - يجب اختبار وجود نقاط شاذة والتي تخرج عن اتجاه المجموع العام فنسعى إلى استبعاد هذه القيم وذلك إذا كانت هذه القيمة تقع خارج المجال $(\bar{X} \pm 4\sigma = 0)$ و ذلك عندما يكون عدد القياسات أكبر أو يساوي العشرة .

-نحسب $(\sigma , \bar{x})$ دون القيم التي يشك بأنها شاذة ، أما إذا كان عدد المراقبات قليلاً (أقل من ١٠) عندها نستبعد القيمة التي تكون أكبر من ثلاثة أضعاف وسطي التوزيع.

-إذا كان لدينا قياسات للتصاريف السنوية الأعظمية لعدد قليل من السنوات عندها يمكن زيادة عدد عناصر السلسلة بأخذ بعض قيم القياسات الأعظمية للتصاريف داخل فترة القياس والتي هي أكبر من قيمة محددة تسمى قيمة العتبة Q_S بذلك مايسمى السلاسل الجزئية.

-إن حساب قيم التصاريف العظمى يمكن أن يتم بعدة طرائق تتعلق بحجم القياسات المتوافرة و نوعها أي هل هذه القياسات هي للتصاريف الأعظمية أم للهطولات الأعظمية وهل هذه القياسات هي للتصاريف الأعظمية أو للهطولات الأعظمية وهل هذه القياسات هي لفترة طويلة أم لفترة قصيرة ، نوع المنشأة وحجمها ... الخ.

❖استناداً إلى طبيعة القياسات المتوافرة و طولها سنذكر الآن الطرائق التي يمكن تطبيقها للحصول على التصاريف الأعظمية:

١. عند توافر سلسلة قياسات للتصاريف عند الموقع المدروس لفترة طويلة ، لهذه الحالة نستخدم الطريقة الإحصائية كاستخدام تابع توزيع احتمالي (تابع توزيع غمبل أو تابع توزيع بيرسون) من أجل الحصول على قيمة التصريف لفترة تكرار ما .
٢. عند توافر سلسلة قياسات للتصاريف لفترة قصيرة عند الموقع المدروس مع وجود سلسلة قياسات تصاريف لفترة طويلة عند موقع مجاور : لهذه الحالة نوجد علاقة ارتباط بين القياسات للفترة المشتركة بين الموقعين المتجاورين ثم نسعى إلى تمديد فترة القياس القصيرة استناداً إلى علاقة الارتباط المستنتجة .
٣. عند توافر قياسات للتصاريف لفترة قصيرة في الموقع المدروس و قياسات للهطول لفترة طويلة على الحوض المدروس هنا نستخدم أحد الموديلات التي تصف علاقة المطر بالجريان و ذلك لتحديد التصاريف التي تنتج عن الهطولات.
٤. لا توجد أي قياسات في الموقع المدروس مع وجود سلسلة قياسات طويلة للتصاريف في موقع مجاور نوجد علاقات تشابه بين الموقع المدروس والموقع المجاور.
٥. عند توافر قياسات للهطول لفترة طويلة على الحوض المدروس ، لهذه الحالة نستعين بموديلات تحديد علاقة المطر بالجريان.

٦. عند توفر قياسات للهطول لفترة قصيرة على الحوض المدروس نسعى هنا إلى تمديد فترة القياسات ثم نتابع حسب الحالة ٥ .

٧. عند عدم توافر أية قياسات هنا نلجأ إلى الطرائق التقريبية .

حساب التصاريف الأعظمية باستخدام الطرائق الإحصائية:

حساب التصاريف الأعظمية باستخدام تابع توزيع غمبل (typ I)

لحساب القيمة العظمى لتصريف (HQ) لفترة تكرار (T) أي $HQ_{(T)}$ نستخدم العلاقة المعروفة التالية:

$$\boldsymbol{HQ_{(T)} = \overline{HQ} + k(T).\sigma}$$

والتي تأخذ الشكل العام الآتي :

$$\boldsymbol{x(T) = \bar{x} + k(T).\sigma}$$

حيث: $\bar{x}$, $\overline{HQ}$ القيم الوسطية.

$x_{(t)}$ و $HQ_{(T)}$ قيمة x أو HQ التي تتكرر كل (T) سنة مرة.

$k(T)$: ثابت التوزيع ويحدد حسب تابع التوزيع الاحتمالي المختار .

σ : الانحراف المعياري

لتابع توزيع غمبل الشكل التالي:

$$\boldsymbol{\Phi_u(x) = e^{-e^{-y}} \quad , \quad y = a(x - M_o)}$$

أما $k(T)$ فيعطى بالنسبة لتوزيع غمبل بالعلاقة:

$$\boldsymbol{k(T) = -\frac{\sqrt{6}}{\pi}.\left(\gamma + \ln\ln\frac{T}{T-1}\right)}$$

حيث : $\gamma = 0.5772$ ثابت أويلر.

و تحدد ثوابت توزيع غمبل بطريقتين هما طريقة العزوم و طريقة غمبل.

طريقة العزوم:

-تستخدم هذه الطريقة عندما يكون عدد عناصر السلسلة كبيراً

-يحدد الثابت a من العلاقة: $\boldsymbol{a = \frac{\pi}{\sigma.\sqrt{6}} = \frac{1.2826}{\sigma}}$

-يحسب معيار التوزيع (M_0) من العلاقة: $M_0 = \bar{x} - 0,5772.\frac{\sqrt{6}}{\pi}.\sigma = \bar{x} - 0,45.\sigma$

بهذا نحسب القيمة $x(T)$ باستخدام المعادلة:

$$x(T) = \bar{x} + k(t).\sigma \quad , \quad k(T) = -\frac{\sqrt{6}}{\pi}.\left(\gamma + \ln\ln\frac{T}{T-1}\right)$$

طريقة غمبل:

يحدد الثابت (a) من العلاقة التالية: $\frac{1}{a} = \frac{\sigma}{\sigma_n}$

يحدد معيار التوزيع من العلاقة التالية: $M_0 = \bar{x} - y_n.\frac{\sigma}{\sigma_n}$

تتعلق قيم $(y_n ، \sigma_n)$ بعدد عناصر السلسلة المدروسة و تؤخذ من الجدول

n	$\bar{y}_n$	σ_n	n	$\bar{y}_n$	σ_n
15	0,5128	1,0206	46	0,5468	1,1538
20	0,5236	1,0628	48	0,5477	1,1574
22	0,5268	1,0755	50	0,5485	1,1607
24	0,5296	1,0865	55	0,5504	1,1681
26	0,5320	1,0961	60	0,5521	1,1747
28	0,5343	1,1047	70	0,5548	1,1854
30	0,5362	1,1124	80	0,5569	1,1938
32	0,5380	1,1193	90	0,5586	1,2007
34	0,5396	1,1255	100	0,5600	1,2065
36	0,5410	1,1313	500	0,5724	1,2588
38	0,5424	1.1363	1000	0,5745	1,2685
40	0,5436	1,1413			
42	0,5448	1,1458		0,5772 = γ	1,2826 = $\frac{\pi}{\sqrt{6}}$
44	0,5458	1,1499			

تحسب قيمة التصريف الأعظمي لفترة تكرار (T) بالعلاقة:

$$x(T) = HQ(T) = M_o + \frac{1}{a}.y(T) \Leftarrow y(T) = -\ln\ln\frac{T}{T-1}$$

$$x(T) = HQ(T) = \bar{x} + \frac{\sigma}{\sigma_n}.[y(T) - y_n]$$

$$x(T) = HQ(T) = \bar{x} + \sigma.\frac{[y(T)-y_n]}{\sigma_n}$$

مثال:

لدينا سلسلة متوسطها الحسابي ٢١٠ والانحراف المعياري ٤٠ احسب احتمال عدم التجاوز للقيمة ١٧٠.

الحل:

من الجدول الكبير نجد أن القيمة المقابلة ل (-1) $\Rightarrow$ $k\left(\frac{170-210}{40}\right) = -1$

$$\Phi_u(1) = 0{,}8413$$

$$\Phi_u(170) = 1 - 0{,}8413 = 8{,}1587$$

$$\Phi_{\overline{u}}(170) = 0{,}8413$$

$$T = \frac{1}{1 - \Phi_u} = \frac{1}{0{,}8413} = 1{,}18 \text{ سنة}$$

طلب ثاني:

احسب التصريف الأعظمي الذي يتكرر كل ١٠٠٠ سنة مرة.

نعوض المعطيات في

$$\boldsymbol{k(T) = -\frac{\sqrt{6}}{\pi}.\left(\gamma + \ln\ln\frac{T}{T-1}\right)}$$

$$\boldsymbol{X = \overline{x} + k(t).\sigma = 407\ m^3/s}$$

وهذه المسألة هامة جداً واحتمال مسألة الفحص تأتي من هذه المحاضرة.

للتحديد قيمة $\Phi_u(k)$ من الجدول:

نحدد من المحور الشاقولي لـ k الرقم الأول بعد الفاصلة ومن المحور الأفقي نحدد الرقم الثاني بعد الفاصلة ونقاطع الحقلين فينتج $\Phi_u(k)$

الجدول يبين قيم تابع توزيع الاحتمال حسب غاوص $\Phi_u(k)$

K	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	.500000	.503989	.507978	.511966	.515953	.519938	.523922	.527903	.531881	.535856
0,1	.539828	.543795	.547758	.551717	.555670	.559618	.563560	.567495	.571424	.575345
0,2	.579260	.583166	.587064	.590954	.594835	.598706	.602568	.606420	.610261	.614092
0,3	.617911	.621720	.625516	.629300	.633072	.636831	.640576	.644309	.648027	.651732
0,4	.655422	.659097	.662757	.666402	.670031	.673645	.677242	.680822	.684386	.687933
0,5	.691462	.694974	.698468	.701944	.705402	.703840	.712260	.715661	.719043	.722405
0,6	.725747	.729069	.732371	.735653	.738914	.742154	.745373	.748571	.751748	.754903
0,7	.758036	.761148	.764238	.767305	.770350	.773373	.776373	.779350	.782305	.785236
0,8	.788145	.791030	.793892	.796731	.799546	.802338	.805106	.807850	.810570	.813267
0,9	.815940	.818589	.821214	.823814	.826391	.828944	.831472	.833977	.836457	.838913
1,0	.841345	.843752	.846136	.848495	.850830	.853141	.855428	.857690	.859929	.862143
1,1	.864334	.866500	.868643	.870762	.872857	.874928	.876976	.879000	.881000	.882977
1,2	.884930	.886861	.888768	.890651	.892512	.894350	.896165	.897958	.899727	.901475
1,3	.903200	.904902	.906582	.908241	.909877	.911492	.913085	.914656	.916207	.917736
1,4	.919243	.920730	.922196	.923642	.925066	.926471	.927855	.929219	.930563	.931889
1,5	.933193	.934478	.935744	.936992	.938220	.939429	.940620	.941792	.942947	.944083
1,6	.945201	.946301	.947384	.948449	.949497	.950528	.951543	.952540	.953521	.954486
1,7	.955434	.956367	.957284	.958185	.959070	.959941	.960796	.961636	.962462	.963273
1,8	.964070	.964852	.965620	.966375	.967116	.967843	.968557	.969258	.969946	.970621
1,9	.971283	.971933	.972571	.973197	.973810	.974412	.975002	.975581	.976148	.976704
2,0	.977250	.977784	.978308	.978822	.979325	.979818	.980301	.980774	.981237	.981691
2,1	.982136	.982571	.982997	.983414	.983823	.984222	.984614	.984997	.985371	.985738
2,2	.986097	.986447	.986791	.987126	.987454	.987776	.988089	.988396	.988696	.988989
2,3	.989276	.989556	.989830	.990097	.990358	.990613	.990862	.991106	.991344	.991576
2,4	.991802	.992024	.992240	.992451	.992656	.992857	.993053	.993244	.993431	.993613
2,5	.993790	.993963	.994132	.994297	.994457	.994614	.994766	.994915	.995060	.995201
2,6	.995339	.995473	.995604	.995731	.995855	.995975	.996093	.996207	.996319	.996427
2,7	.996533	.996636	.996736	.996833	.996928	.997020	.997110	.997197	.997282	.997365
2,8	.997445	.997523	.997599	.997673	.997744	.997814	.997882	.997948	.998012	.998074
2,9	.998134	.998193	.998250	.998305	.998359	.998411	.998462	.998511	.998559	.998605
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
3,0	.998650	.999032	.999313	.999517	.999663	.999767	.999841	.999892	.999928	.999952

الجدول يبين قيم كثافة الاحتمال $\varphi(k)$ حسب غاوص

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	.39894	.39892	.39886	.39876	.39862	.39844	.39822	.39797	.39767	.39733
0,1	.39695	.39654	.39608	.39559	.39505	.39448	.39387	.39322	.39253	.39181
0,2	.39104	.39024	.38940	.38853	.38762	.38667	.38568	.38466	.38361	.38251
0,3	.38139	.38023	.37903	.37780	.37654	.37524	.37391	.37255	.37115	.36973
0,4	.36827	.36678	.36526	.36371	.36213	.36053	.35889	.35723	.35553	.35381
0,5	.35207	.35029	.34849	.34667	.34482	.34294	.34105	.33912	.33718	.33521
0,6	.33322	.33121	.32918	.32713	.32506	.32297	.32086	.31874	.31659	.31443
0,7	.31225	.31006	.30785	.30563	.30339	.30114	.29887	.29659	.29431	.29200
0,8	.28969	.28737	.28504	.28269	.28034	.27798	.27562	.27324	.27086	.26848
0,9	.26609	.26369	.26129	.25888	.25647	.25406	.25164	.24923	.24681	.24439
1,0	.24197	.23955	.23713	.23471	.23230	.22988	.22747	.22506	.22265	.22025
1,1	.21785	.21546	.21307	.21069	.20831	.20594	.20357	.20121	.19886	.19652
1,2	.19419	.19186	.18954	.18724	.18494	.18265	.18037	.17810	.17585	.17360
1,3	.17137	.16915	.16694	.16474	.16256	.16038	.15822	.15608	.15395	.15183
1,4	.14973	.14764	.14556	.14350	.14146	.13943	.13742	.13542	.13344	.13147
1,5	.12952	.12758	.12566	.12376	.12188	.12001	.11816	.11632	.11450	.11270
1,6	.11092	.10915	.10741	.10567	.10396	.10226	.10059	.09893	.09728	.09566
1,7	.09405	.09246	.09089	.08933	.08780	.08628	.08478	.08329	.08183	.08038
1,8	.07895	.07754	.07614	.07477	.07341	.07206	.07074	.06943	.06814	.06687
1,9	.06562	.06438	.06316	.06195	.06077	.05959	.05844	.05730	.05618	.05508
2,0	.05399	.05292	.05186	.05082	.04980	.04879	.04780	.04682	.04586	.04491
2,1	.04398	.04307	.04217	.04128	.04041	.03955	.03871	.03788	.03706	.03626
2,2	.03547	.03470	.03394	.03319	.03246	.03174	.03103	.03034	.02965	.02898
2,3	.02833	.02768	.02705	.02643	.02582	.02522	.02463	.02406	.02349	.02294
2,4	.02239	.02186	.02134	.02083	.02033	.01984	.01936	.01889	.01842	.01797
2,5	.01753	.01709	.01667	.01625	.01585	.01545	.01506	.01468	.01431	.01394
2,6	.01358	.01323	.01289	.01256	.01223	.01191	.01160	.01130	.01100	.01071
2,7	.01042	.01014	.00987	.00961	.00935	.00909	.00885	.00861	.00837	.00814
2,8	.00792	.00770	.00748	.00727	.00707	.00687	.00668	.00649	.00631	.00613
2,9	.00595	.00578	.00562	.00545	.00530	.00514	.00499	.00485	.00471	.00457
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
3,0	.00443	.00327	.00238	.00172	.00123	.00087	.00061	.00042	.00029	.00020