كليّة الهندسة

السنة الثالثة

الفصل الأول

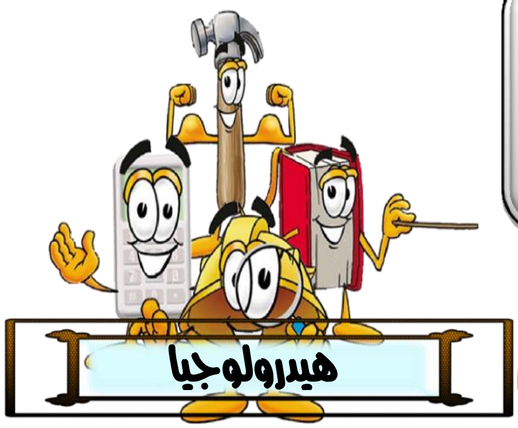
الدكتور: هشام النجار

12/11/2013

المحاضرة

13

عدد الصفحات 8



التحليل الأولي للقياسات الهيدرولوجية

أثناء تقويم منحني تغير قيم المتحول فإننا لا نأخذ بالاعتبار زمن ظهور الحوادث وإنما القيم فمثلاً لرسم مخطط التكرار والاستمرار نهتم بعدد القيم التي تقع ضمن مجال محدد بغض النظر عن زمن ظهورها.

الثوابت الاحصائية الأولية:

- **المتوسط الحسابي:** هو ناتج قسمة مجموع عناصر العينة على عددها.

$$\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$$

- **الانحراف المعياري:** يمثل مدى تبعثر عناصر السلسلة حول متوسطها الحسابي و الذي يحسب من العلاقة التالية:

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{n-1}\cdot\sum(X_i-\bar{X})^2}$$

n: عدد عناصر السلسلة.

خواص الانحراف المعياري:

إن وحدة الانحراف المعياري هي وحدة عناصر السلسلة نفسها و إذا أضفنا إلى جميع عناصر السلسلة عدداً أو طرحنا منها عدداً فإن قيمة σ لا تتغير و إذا ضربنا جميع عناصر السلسلة بعدد أو قسمناها على عدد فإن قيمة σ تضرب بالعدد نفسه و تقسم عليه.

- **معامل التغيير c_v:**

من أجل إجراء مقارنة بين سلسلتين نقوم بحساب معامل التغيير حيث نقوم بقسمة الانحراف المعياري على المتوسط الحسابي و بذلك نتمكن من المقارنة بين عوامل لا بعدية.

$$c_v = \frac{\sigma}{\overline{X}}$$

خواص معامل التغيير هي:

a) لا تتغير قيمة معامل التغيير عندما نضرب جميع عناصر السلسلة بعدد ثابت أو نقسمها على عدد ثابت .

b) يتناقص معامل التغيير إذا أضفنا إلى جميع عناصر السلسلة عدد ثابت والعكس صحيح بالنسبة للطرح (لأن الانحراف المعياري لا يتأثر و لكن المتوسط سيزداد عند الإضافة و هو في المقام أي يقل معامل التغيير و العكس صحيح).

c) معامل التغيير لا واحدة له.

- **معامل عدم التناظر c_s:**

يعبر معامل التناظر عن مدى تناظر الانحرافات الموجبة والسالبة لعناصر السلسلة بالنسبة لمتوسطها الحسابي ، حيث تتصف السلاسل الهيدرولوجية غالباً بأنها لاتتوزع بشكل متناظر حول المتوسط.

قد يكون لسلسلتين قيمة المتوسط الحسابي نفسها وقيمة معامل التغيير نفسها ومع ذلك تكونان مختلفتين ويظهر هذا الاختلاف من خلال حساب معامل عدم التناظر c_s

$$c_s = \frac{\sum_{i=1}^{n}(k_i - 1)^3}{(n-1).c_v^3} \qquad : k_i = \frac{x_i}{\overline{X}}$$

تطبق العلاقة الأساسية إذا كان عدد عناصر السلسلة أكبر أو يساوي 60

- **التكرار المطلق:**

يتردد في الاقتصاد المائي مفهوم التكرار مثال ذلك تكرار تصريف معين $Q\ (m^3\ /\ s)$ والذي يرمز له ب $h(X_i)$.

يعرف التكرار المطلق $h(X_i)$ بأنه عدد المراقبات و التي من أجلها $X_i < X < X_i + \Delta X_i$

حيث ΔX_i عرض المجال .

يمكن الحصول عملياً على التكرار المطلق بتقسيم كامل مجال تتحول القيم إلى عدد من المجالات (k) عرض كل منها ΔX_i ومن ثم نقوم بِعَد القيم (X) ضمن كل مجال.

عندما نوقع قيم التكرار التي نحصل عليها مع قيم X على شبكة إحداثيات نحصل على مخطط التكرار والذي يظهر بشكل متدرج و يسمى توزع التكرار و إذا كان عرض المجال صغيراً جداً نحصل على منحني مستمر يسمى منحني التكرار وذلك عندما يكون عدد العناصر كبيراً جداً.

إن مجموع التكرار يجب أن يساوي حجم السلسلة (n)

توجد عدة وجهات نظر من أجل التقسيم إلى مجالات بعضها مايطلب عدداً أصغرياً من المجالات (k) و ينصح ألا تتجاوز قيمة عرض المجال $(0 , \sigma)$.

عندما يكون عرض المجال كبيراً فلن يعكس مخطط التكرار كامل المعلومات المقاسة وهنا يحصل مايسمى ضياع المعلومات.

- **التكرار النسبي:**

إذا قمنا بتقسيم التكرار المطلق على عدد عناصر السلسلة نحصل على التكرار النسبي و يعطى بالعلاقة:

$$N_{(xi)} = \frac{h(x_i)}{n} \%$$

إذا وقعنا قيم التكرار النسبي مع قيم X نحصل على كثافة الاحتمال.

استناداً إلى مخطط التكرار أو التكرار النسبي يمكن الحصول على قيم هامة مثل معيار التوزيع (M_0) أو المنوال $mod\ (x)$ وهي القيمة الأكثر تكراراً ، كما يمكن الحديث عن سلسلة ذات انحراف يساري $mod\ (X) < \bar{X}$ أو سلسلة ذات انحراف يميني عندما $mod\ (X) > \bar{X}$

غالباً مانصادف في الهيدرولوجيا سلاسل ذات انحراف يساري و تحسب قيمة الانحراف (s) من العلاقة التالية:

$$s = \frac{\bar{X} - mod(x)}{\sigma_{(x)}}$$

- **مجموع التكرار- منحني الاستمرار:**

مجموع التكرار $D_{(x_i)}$ هو تجميع مخطط التكرار $h(x_i)$ وهو يعبر عن عدد القيم التي هي أقل أو تساوي (x_i) وهذا مايسمى التكرار لعدم التجاوز.

عندما نوقع قيم التكرار للتجاوز أو لعدم التجاوز مع قيم (X) فنحصل على منحني الاستمرار للتجاوز أو لعدم التجاوز و عندما نقسم قيم منحني لاستمرار للتجاوز أو لعدم التجاوز على عدد عناصر السلسلة (n) نحصل على ما يسمى تابع توزيع الاحتمالات للتجاوز أو عدم التجاوز.

نشير هنا إلى أنه عندما نقوم بتجميع قيم التكرار لدينا بدءاً من القيم الدنيا نحصل على منحني التكرار لعدم التجاوز.

وعندما نبدأ بتجميع قيم التكرار بدءاً من القيم العظمى نحصل على منحني الاستمرار للتجاوز

- لقيمة ما (x_i) يكون مجموع التكرار لعدم التجاوز (مجموع عدد القيم التي هي أصغر أو تساوي x_i) و مجموع التكرار للتجاوز(مجموع عدد القيم التي هي أكبر من (x_i) و يساوي مجموع عناصر السلسلة .

$$\bar{D}_{(x_i)} + D_{(x_i)} = n$$

$\bar{D}_{(x_i)}$: مجموع التكرار لعدم التجاوز $D_{(x_i)}$:مجموع التكرار للتجاوز

التحليل الاحتمالي للمعطيات الهيدرولوجية:

عند إجراء التحليل الاحتمالي للمعطيات الهيدرولوجية نطبق نظرية الاحتمالات على قيم القياسات لذلك لابد من إيضاح المفاهيم التالية:

الاحتمال: يعرف الاحتمال بشكله البدائي كما يلي:

$$p = \frac{\text{عدد الحالات المناسبة}}{\text{عدد الحالات الكلية}} = \frac{m}{n}$$

وبتطبيق ذلك على حجر النرد نجد مثلا احتمال ظهور العدد 4 $p_{(x=4)} = \frac{1}{6}$

أما إذا طرحنا سؤال آخر ❖ما هو احتمال ظهور عدد أقل أو يساوي (4) فنجد: $p_u(x \leq 4) = \frac{4}{6}$

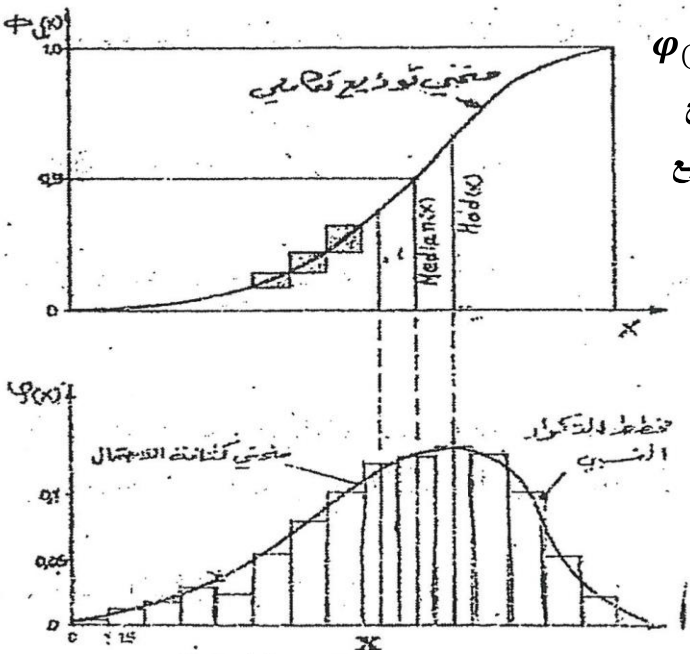
نسمي هنا p_u احتمال عدم التجاوز وهو يعطي احتمال الوصول إلى قيمة محددة ل (x_i) أو أقل منها.

أما احتمال ظهور قيمة أكبر من (4) فهو: $p_{\bar{u}}(x > 4) = \frac{2}{6}$ حيث: $p_{\bar{u}}$ احتمال التجاوز.

عندما يكون عدد عناصر السلسلة n لا نهائياً يتحول مخطط التكرار إلى منحني كثافة الاحتمال أو مايسمى توزيع الاحتمال التفاضلي الذي يكتب بالشكل التالي: $\varphi_{(x_i)} = \frac{h_{(x_i)}}{n}$

ومنه نجد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{(x)}.dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h_{(x)}}{n}.dx = \frac{n}{n} = 1$$

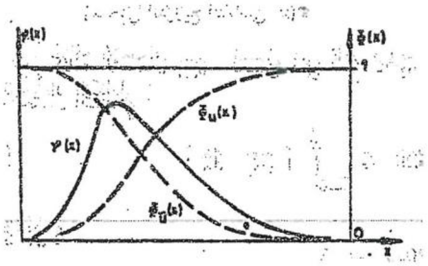


الشكل التالي يبين منحني التوزيع التفاضلي $\varphi_{(x)}$ وكذلك منحني التوزيع التكاملي بمكاملة تابع الكثافة الاحتمالية $\varphi_{(x)}$ نحصل على تابع توزيع احتمال أو منحني توزيع الاحتمال التكاملي

$$\Phi_{(x_i)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{(x)}.dx = 1$$

نلاحظ أن $\Phi_{(x_n)} = 1$

وبالنظر لأن حدود التكامل تبدأ من القيم الدنيا حتى القيمة التي نحسب لها الاحتمال نكون هنا قد حسبنا احتمال عدم التجاوز و الذي نرمز له ب :



$$\Phi(x \le x_i) = \Phi_u(x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} \varphi_{(x)}.dx$$

وبالطريقة نفسها نحسب احتمال التجاوز من المعادلة التالية:

$$\Phi(x > x_i) = \Phi_{\overline{u}}(x_i) = \int_{x_i}^{+\infty} \varphi_{(x)}.dx$$

$$\Phi_u(x_i) + \Phi_{\overline{u}}(x_i) = 1$$

غالباً مايسمى احتمال التجاوز (احتمال الضمان أو اختصاراً الضمان).

فترة التكرار:

لنفرض أنه تم قياس التصاريف السنوية الأعظمية لأحد الأنهار (أعلى قيمة للتصريف كل سنة ووجدنا أن نسبة قيم التصاريف التي هي أعلى من $120\ m^3/s$ تبلغ 5% أي

$$\Phi_{\overline{u}}(120) = 5\%$$

من هنا يمكن أن نستنتج أنه وسطياً تصادف القيمة للتصريف $120\ m^3/s$ أو أعلى منها مرة كل عشرين سنة بمعنى آخر قيمة التصريف $Q \ge 120\ m^3/s$ تتكرر مرة كل عشرين سنة $(T = 20\ years)$ بهذا نسمي (T) فترة التكرار و يمكن أن نكتب التالي:

$$Q_{(T)} = Q_{(20)} = 120\ m^3/s$$

نعرف فترة التكرار بأنها الزمن الوسطي لتكرار حدث ما و يرمز لها ب T كما تسمى أحياناً فترة الرجوع و تقدر بالسنة.

مما سبق نستنتج أنه من العينة العشوائية والتي تمثل عناصرها قيمة التصريف الأعظمي من كل عام فإن فترة التكرار تحسب من العلاقة :

$$T = \frac{1}{\Phi_{\bar{u}}} = \frac{1}{1-\Phi_u}\ year$$

توابع التوزيع الاحتمالية:

الاحتمالات التجريبية: يتم حساب الاحتمالات التجريبية كما يلي:

A. ترتيب القيم العشوائية (القياسات) من القيم الدنيا حتى العظمى (أي تصاعدياً)

B. نعطي لكل قيمة رقماً خاصاً (m_i) حسب تسلسلها في الترتيب بحيث تأخذ أصغر قيمة الرقم ١ و أكبر قيمة الرقم n.

C. نحسب الاحتمال عدم التجاوز لقيمة ما (x_i) باستخدام العلاقة التالية والذي يسمى الاحتمال التجريبي:

$$p_u(x \le x_i) = \frac{m_i}{n}$$

حيث: $p_u(X \le X_i)$ هو الاحتمال التجريبي لعدم التجاوز للقيمة X_i

بهذا يكون الاحتمال التجريبي لعدم التجاوز للقيمة العظمى هو:

$$p_u(x = x_{Max}) = \frac{m_n}{n} = 1$$

إن هذا الاحتمال ليس صحيحاً تماماً حيث يعني أن جميع القيم التي تحقق الشرط:

$$X_i \ge X_{Max}$$

لها الاحتمال نفسه وهذا لا يتطابق مع المجموع العام للعناصر حيث أنه يمكن ظهور قيمة خارج مجال العينة المدروسة تكون أكبر من القيمة العظمى:

$$X > X_{Max}$$

لهذا السبب سنستخدم العلاقة التالية لتحديد الاحتمالات التجريبية $p_u(x_i)$ أي احتمال عدم التجاوز:

$$p_u(x_i) = \frac{m_i}{n+1}$$

وبهذا يكون احتمال التجاوز:

$$p_{\bar{u}}(x_i) = \frac{n-m_i+1}{n+1}$$

ويمكن استخدام العلاقة التالية من أجل توزيع غاوص:

$$p_u(X \le X_i) = \frac{m_i - 0.375}{n + 0.25}$$

وتوجد في المراجع علاقات أخرى ، أخيراً نشير إلى أنه عندما نقوم بترتيب القيم المقاسة بدءاً من القيم العظمى تنازلياً فإننا نحصل على احتمال التجاوز.

تابع توزيع غاوص:

هو أحد التوابع المهمة في الإحصاء و الذي اُستخدم من قبل غاوص في دراسة أخطاء القياس و يعطى

تابع كثافة الاحتمال بالعلاقة:

$$\varphi_{(x)} = \frac{1}{\sigma.\sqrt{2.\pi}}.e^{-\frac{1}{2}.[(x-\bar{x})/\sigma]^2}$$

وهو تابع التوزيع التفاضلي حيث:

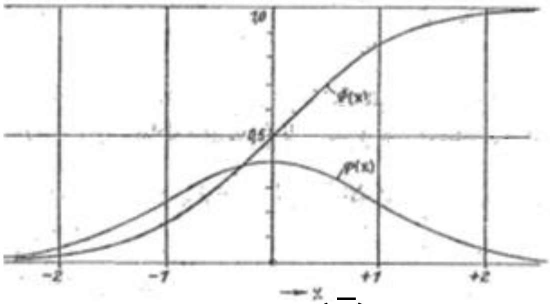
$\bar{x}$: المتوسط الحسابي

σ: الانحراف المعياري

بمكاملة التابع $\varphi_{(x)}$

نحصل على تابع التوزيع التكاملي و الذي يأخذ الشكل التالي لحالة عدم التجاوز:

$$\Phi_{(x)} = \frac{1}{\sigma.\sqrt{2.\pi}}.\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right]^2}.dx$$



يتميز تابع غاوص بالخواص التالية:

١. المتحول (X) ليس له نهاية عظمى أو دنيا $(-\infty < x < +\infty)$

٢. قيمة تابع كثافة الاحتمال تساوي الصفر عندما $x = +\infty\ , x = -\infty$

٣. أكثر قيمة تكراراً حسب تابع توزيع غاوص هي القيمة المتوسطة $(\bar{X})$ أي أن المنحني $\varphi_{(x)}$ يبلغ القيمة العظمى عندما $x = \bar{x}$

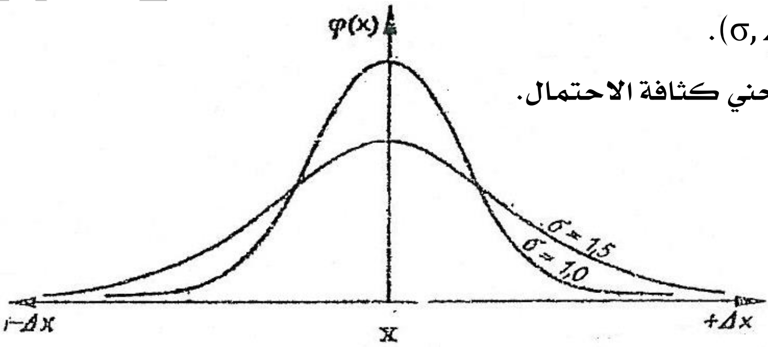
٤. للقيم $x - \bar{x}$ و $x + \bar{x}$ الاحتمال نفسه أي أن تابع كثافة غاوص متناظر حول x

٥. وسطي التوزيع و معيار التوزيع منطبقان مع المتوسط الحسابي أي:

$$\bar{X} = mod = me(X)$$ الوسيط

٦. للتابع لغاوص ثابتان هما $(\sigma, \bar{X})$.

٧. تتغير قيمة σ بتغير شكل منحني كثافة الاحتمال.



عندما ندخل متحولاً خاصاً (k) إلى معادلة كثافة الاحتمال بحيث تكون قيمة الانحراف المعياري لهذا المتحول $\sigma_{(k)} = 1$ وقيمة المتوسط الحسابي ل (k) تساوي الصفر يأخذ تابع غاوص الشكل التالي:
$$\varphi_{(k)} = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.e^{-\frac{k^2}{2}}$$

حيث k المتحول القياسي و يعطى بالشكل : $k = \frac{(x_i - \bar{x})}{\sigma}$

وهذا يشبه تابع التوزيع الطبيعي المعياري في الرياضيات حيث كنا نفعل هذا لكي نستطيع حساب الاحتمال بالحاسبة وهنا كذلك.

أما تابع توزيع الاحتمال فيعطى بالشكل التالي:

$$\boxed{\Phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.\int_{-\infty}^{k} e^{-\frac{k^2}{2}}.dx}$$

مع العلم أن: $\Phi(-k) = 1 - \Phi(k)$ وَ $\varphi(k) = \varphi(-k)$